

球Banach Sobolev空间的VMO型特征刻画

Hongchao Jia
(Joint work with X. Yan and D. Yang)
hongchaojia@henu.edu.cn

2025年12月20日 杭州

Outline

- 1 研究背景
- 2 主要结果
- 3 偶数阶情形
- 4 一些未解决的问题

研究背景

- 刻画函数空间的重要指标: 可积性尺度和光滑性尺度.
- 可积性尺度: 例如 f 属于Lebesgue空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($p \in [1, \infty)$) 当且仅当

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} := \begin{cases} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}, & q \in (0, \infty), \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|, & q = \infty. \end{cases}$$

- 光滑性尺度: 例如BMO空间, Sobolev空间与有界变差空间BV.
- Sobolev空间 $\dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ ($k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$): $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\|f\|_{\dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)} := \| |\nabla^k f| \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

其中 $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$. 且令 $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$.

- 称 $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 是 f 的 β -阶弱导数若, 对任意 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial^\beta \phi(x) dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \phi(x) dx.$$

- **BMO空间**: $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\|f\|_{\text{BMO}} := \sup_{\text{cube } Q \subset \mathbb{R}^n} \int_Q |f(x) - f_Q| \, dx < \infty,$$

其中,

$$f_Q := \int_Q f(x) \, dx := \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) \, dx.$$

- $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \text{BMO}$, $\log|x| \in \text{BMO} \setminus L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- **F. John & L. Nirenberg**, **Comm. Pure Appl. Math.** 14 (1961), 415–426.

Sobolev嵌入

- 次临界情形($kp < n$, Sobolev不等式): $W^{k,p} \subset L^q$, $q \in [p, \frac{np}{n-kp}]$;
- 临界情形($kp = n$, Poincaré不等式): $W^{k,p} \subset \text{BMO}$;
- 超临界情形($kp > n$, Morrey不等式): $W^{k,p} \subset C^{k,\alpha} \subset \text{BMO}$.

- 由Poincaré不等式知, 对任意 $u \in W^{1,p}$,

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |u(y) - u_{B(x,r)}| dy &\lesssim r \int_{B(x,r)} |\nabla u(y)| dy \\ &\leq r \left[\int_{B(x,r)} |\nabla u(y)|^n dy \right]^{\frac{1}{n}} \lesssim \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^n \right]^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

故 $W^{1,p} \subset \text{BMO}$.

Theorem 1 (FMS18, Theorem 2.2)

设 $p \in (1, \infty)$, 则 $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\{Q_j\}_{j \in \mathcal{G}_\epsilon}} \epsilon^{n-p} \sum_{j \in \mathcal{G}_\epsilon} \int_{Q_j} |f(x) - f_{Q_j}|^p dx < \infty;$$

且若 $p \in [1, \infty)$, 则对任意 $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\{Q_j\}_{j \in \mathcal{G}_\epsilon}} \epsilon^{n-p} \sum_{j \in \mathcal{G}_\epsilon} \int_{Q_j} |f(x) - f_{Q_j}|^p dx = \gamma(n, p) \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p,$$

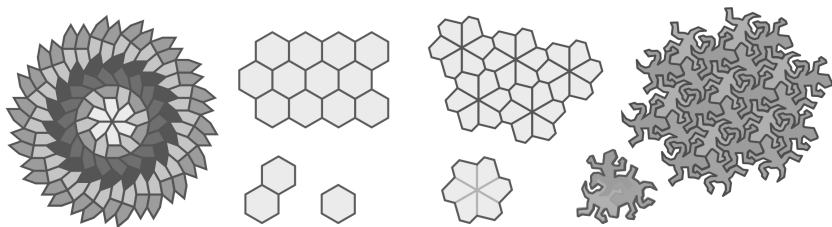
其中上确界取遍所有两两不交, 边长 ϵ , 且方向任意的开方体族 $\{Q_j\}_{j \in \mathcal{G}_\epsilon}$.

- [FMS18] N. Fusco, G. MoscarIELlo & C. Sbordone, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 24 (2018), 835–847.

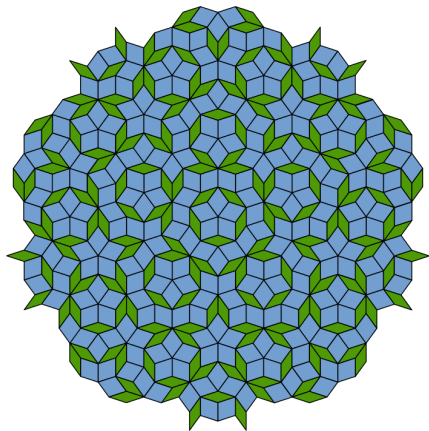
- 对任意 $p \in [1, \infty)$, $\gamma(n, p) := \max_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} \int_{Q_0} |x \cdot v|^p dx$, 其中 $Q_0 := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n$.
- $\gamma(n, p)$ 仅依赖于 n, p 而不依赖于 Q_0 的方向: 对任意 $R \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, 令 $v_{R(Q_0)} \in \operatorname{argmax}_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} \int_{R(Q_0)} |x \cdot v| dx$. 则

$$\begin{aligned}\gamma(n, p) &= \int_{Q_0} |x \cdot v_{Q_0}| dx = \int_{R(Q_0)} |R^T x \cdot v_{Q_0}| dx \\ &= \int_{R(Q_0)} |x \cdot R(v_{Q_0})| dx \leq \max_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} \int_{R(Q_0)} |x \cdot v| dx \\ &= \int_{R(Q_0)} |x \cdot v_{R(Q_0)}| dx = \int_{Q_0} |x \cdot R(v_{R(Q_0)})| dx \\ &\leq \gamma(n, p).\end{aligned}$$

事实上, 方体族可以换成任意镶嵌:



彭罗斯地砖



Definition 1

令 $\epsilon \in (0, 1)$. 称集合 $\mathcal{T}_\epsilon(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个 ϵ -镶嵌若:

- (i) (不重叠条件) $\mathcal{T}_\epsilon(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两两不交开子集 (称为 $\mathcal{T}_\epsilon(\mathbb{R}^n)$ 的细胞 (cell)) 族.
 - (ii) (无间隙条件)
$$|\mathbb{R}^n \setminus \cup \{T_\epsilon : T_\epsilon \in \mathcal{T}_\epsilon(\mathbb{R}^n)\}| = 0.$$
 - (iii) (相似条件) 存在开集 $\hat{Q} \subset \mathbb{R}^n$ (参考细胞) 使得对任意 $T_\epsilon \in \mathcal{T}_\epsilon(\mathbb{R}^n)$, $T_\epsilon = h(\epsilon \hat{Q})$, $h \in E(n)$.
- 且 $\mathcal{T}_\epsilon(\mathbb{R}^n)$ 称为刚性的若 $\mathcal{T}_\epsilon(\mathbb{R}^n)$ 中所有细胞有相同方向.

- G. Di Fratta & A. Fiorenza, J. Funct. Anal. 279 (2020), 108556, 26 pp.

Definition 2

称集合族 $\{Q_\epsilon(\mathbb{R}^n)\}_{\epsilon \in (0,1)}$ 为**常规镶嵌族**若:

- (i) **(不重叠条件)** 对任意 $\epsilon \in (0, 1)$, $Q_\epsilon(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的可数不交开集族.
- (ii) **(无间隙条件)**

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{1}_{\bigcup_{Q \in Q_\epsilon(\mathbb{R}^n)} Q} = 1, \text{ a.e. on } \mathbb{R}^n.$$

- (iii) **(一致相似条件)** 存在**参考细胞** $\hat{Q} \subset \mathbb{R}^n$ 满足对任意 $Q_\epsilon \in Q_\epsilon(\mathbb{R}^n)$, 存在 $h \in E(n)$ 使得 $Q_\epsilon = h(\epsilon \hat{Q})$.

此外称 $\{Q_\epsilon(\mathbb{R}^n)\}_{\epsilon \in (0,1)}$ 是**刚性的**若 $Q_\epsilon(\mathbb{R}^n)$ 中所有细胞具有相同方向.

- G. Di Fratta & A. Fiorenza, *J. Funct. Anal.* 279 (2020), 108556, 26 pp.

Definition 3

设 $p \in [1, \infty)$ 且 $\hat{Q}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的某个嵌入的参考细胞. 对任意 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 令

$$\kappa_p^\epsilon[f, \hat{Q}] := \sup_{\mathcal{G}_\epsilon(\Omega, \hat{Q})} \left\{ \sum_{Q \in \mathcal{G}_\epsilon(\hat{Q})} \frac{1}{\epsilon^{p-n}} \int_Q |f(y) - f_Q|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}},$$

其中上确界取遍 $\mathcal{G}_\epsilon(\hat{Q})$, 即形如 $h(\hat{Q}_\epsilon)$, $h \in E(\mathbb{R}^n)$ 的两两不交的开集族. $[\mathcal{G}_\epsilon(\hat{Q})$ 中细胞具有不同方向].

- G. Di Fratta & A. Fiorenza, *J. Funct. Anal.* 279 (2020), Paper No. 108556, 26 pp.

Theorem 2

令 $p \in [1, \infty)$ 且 $\widehat{Q}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的某个嵌入的参考细胞.

(i) 对任意 $f \in \dot{W}_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \kappa_p^\epsilon [f, \widehat{Q}] = \Gamma(p, n, \widehat{Q}) \|f\|_{\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $\Gamma(p, n, \widehat{Q}) := \max_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} \int_{\widehat{Q}} |x \cdot v|^p dx$.

(ii) 若 $p \in (1, \infty)$, 则 $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \kappa_p^\epsilon [f, \widehat{Q}] < \infty.$$

- G. Di Fratta & A. Fiorenza, J. Funct. Anal. 279 (2020), Paper No. 108556, 26 pp.

主要结果

- 推广光滑性条件: $\dot{W}^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \dot{W}^{k,p}(\Omega)$
- 推广可积性条件: $\dot{W}^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \dot{W}^{k,X}(\Omega)$.

主要结果

- 主要困难

- $\gamma(n, p, \hat{Q}) \implies ?$

- 下式左边 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 范数体现在哪里

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\{Q_j\}_{j \in \mathcal{G}_\epsilon}} \epsilon^{n-p} \sum_{j \in \mathcal{G}_\epsilon} \int_{Q_j} |f(x) - f_{Q_j}|^p dx = \gamma(n, p) \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

主要结果: $\gamma(n, p) \implies ?$

- $k = 1$: 对任意 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ 及 $x, h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{\{\beta \in \mathbb{Z}_+^n: |\beta| \leq 1\}} \frac{\partial^\beta f(x)}{\beta!} h^\beta + R^{(1)}(x, h) \\ &= f(x) + \nabla f(x) \cdot h + R^{(1)}(x, h), \end{aligned}$$

其中 $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$.

主要结果: $\gamma(n, p) \implies ?$

- $k \geq 2$: 对任意 $k \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ 及 $x, h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{\{\beta \in \mathbb{Z}_+^n: |\beta| \leq k\}} \frac{\partial^\beta f(x)}{\beta!} h^\beta + R^{(k)}(x, h) \\ &= f(x) + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m!} \sigma_m(h) \cdot \nabla \left(D^{m-1} f \right) (x) \cdot h + R^{(k)}(x, h), \end{aligned}$$

其中 $\nabla(D^{m-1}f)(x) \in \mathbb{M}_{n^{m-1}, n}$ 且满足

$$\left| \nabla \left(D^{m-1} f \right) (x) \right| = |\nabla^m f(x)|.$$

主要结果: $\gamma(n, p) \implies ?$



$$\tilde{\mathbb{M}}_{n^{k-1}, n} := \left\{ \nabla \left(D^{k-1} P \right) : P = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha|=k\}} b_\alpha x^\alpha \text{ with } b_\alpha \in \mathbb{C} \right\}.$$

- 事实上, 若 $n = 2 = k$, 则

$$\tilde{\mathbb{M}}_{n^{k-1}, n} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\}.$$

主要结果: $\gamma(n, p) \implies ?$

- 对任意 $q \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, 及有界开集 $\hat{Q} \subset \mathbb{R}^n$, 令

$$\gamma(n, q, k, \hat{Q})$$

$$:= \min_{\{A \in \tilde{\mathbb{M}}_{n^{k-1}, n} : |A|=1\}} \frac{1}{k!} \left[\int_{\hat{Q}} \left| \sigma_k(x) Ax - P_{\hat{Q}}^{(k-1)}(\sigma_k(\cdot) A \cdot)(x) \right|^q dx \right]^{\frac{1}{q}},$$

$$\Gamma(n, q, k, \hat{Q})$$

$$:= \max_{\{A \in \tilde{\mathbb{M}}_{n^{k-1}, n} : |A|=1\}} \frac{1}{k!} \left[\int_{\hat{Q}} \left| \sigma_k(x) Ax - P_{\hat{Q}}^{(k-1)}(\sigma_k(\cdot) A \cdot)(x) \right|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}.$$

主要结果: $\gamma(n, p) \implies ?$

- $0 < \gamma(n, q, k, \hat{Q}) \leq \Gamma(n, q, k, \hat{Q}) < \infty.$
- $\gamma(n, q, \mathbf{1}, \hat{Q}) = \gamma(n, q, \mathbf{1}, R(\hat{Q})), \forall R \in O(\mathbb{R}^n).$
- $\Gamma(n, q, \mathbf{1}, \hat{Q}) = \Gamma(n, q, \mathbf{1}, R(\hat{Q})), \forall R \in O(\mathbb{R}^n).$
- $\gamma(\mathbf{1}, q, k, \hat{Q}) = \Gamma(\mathbf{1}, q, k, \hat{Q}).$
- $\gamma(n, q, \mathbf{1}, B(\mathbf{0}, 1)) = \Gamma(n, q, \mathbf{1}, B(\mathbf{0}, 1)).$
- If $n, k \geq 2$, 则 $\gamma(n, q, k, \hat{Q}) < \Gamma(n, q, k, \hat{Q}).$
- $k, n = 2$: Let $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $B := \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$

推广光滑性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$

Definition 4

设 $p, q \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, $\widehat{Q}$ 是某刚性常规镶嵌族 $\{Q_\epsilon(\mathbb{R}^n)\}_{\epsilon \in (0,1)}$ 的参考细胞. 对任意 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 及 $\epsilon \in (0, 1)$, 令

$$\tau_{p,q}^\epsilon [f, \widehat{Q}] := \sup_{\{Q_\epsilon(\mathbb{R}^n)\}_{\epsilon \in (0,1)}} \left\{ \sum_{Q \in Q_\epsilon(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{\epsilon^{kp-n}} \left[\int_Q |f(y) - P_Q^{(k-1)}(f)(y)|^q dy \right]^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}},$$

其上确界取遍所有刚性常规镶嵌族 $\{Q_\epsilon(\mathbb{R}^n)\}_{\epsilon \in (0,1)}$.

推广光滑性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$

Theorem 3

设 $p, q \in [1, \infty)$ 且 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$, 设 $\hat{Q}$ 是某刚性常规镶嵌族 $\{Q_\epsilon(\mathbb{R}^n)\}_{\epsilon \in (0,1)}$ 的参考细胞且 $\hat{Q}$ 是延拓区域.

(i) 对任意 $f \in \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\gamma\left(n, q, k, \hat{Q}\right) \|f\|_{\dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \tau_{p,q}^\epsilon \left[f, \hat{Q} \right] \leq \Gamma\left(n, q, k, \hat{Q}\right) \|f\|_{\dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)}$$

(ii) 若 $p \in (1, \infty)$, 则 $f \in \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \tau_{p,q}^\epsilon \left[f, \hat{Q} \right] < \infty.$$

- H. Jia, X. Yan & D. Yang, *Math. Z.* 311 (2025), no. 2, Paper No. 36, 57 pp.

推广光滑性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$

Definition 5

设 $p, q \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, 可延拓区域 $\hat{Q}$ 是某常规镶嵌族的参考细胞. 对任意 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 令

$$\kappa_{p,q}^\epsilon [f, \hat{Q}] := \sup_{\mathcal{G}_\epsilon(\hat{Q})} \left\{ \sum_{Q \in \mathcal{G}_\epsilon(\hat{Q})} \frac{1}{\epsilon^{kp-n}} \left[\int_Q |f(y) - P_Q^{(k-1)}(f)(y)|^q dy \right]^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}},$$

其中上确界取遍所有 $\mathcal{G}_\epsilon(\hat{Q})$, 即两两不交的形如 $h(\hat{Q}_\epsilon)$, $h \in E(\mathbb{R}^n)$ 的开集族全体. $[\mathcal{G}_\epsilon(\hat{Q})$ 中的细胞具有任意方向].

推广光滑性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$

Theorem 4

设 $p, q \in [1, \infty)$ 且 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$, 设 $\widehat{Q}$ 是某常规镶嵌族的参考细胞且 $\widehat{Q}$ 是延拓区域.

(i) 对任意 $f \in \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \gamma\left(n, q, k, \widehat{Q}\right) \|f\|_{\dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)} &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \kappa_{p,q}^\epsilon \left[f, \widehat{Q} \right] \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \kappa_{p,q}^\epsilon \left[f, \widehat{Q} \right] \\ &\leq \Gamma\left(n, q, k, \widehat{Q}\right) \|f\|_{\dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

(ii) 若 $p \in (1, \infty)$, 则 $f \in \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \kappa_{p,q}^\epsilon \left[f, \widehat{Q} \right] < \infty.$$

- H. Jia, X. Yan & D. Yang, *Math. Z.* 311 (2025), no. 2, Paper No. 36, 57 pp.

推广光滑性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$

Theorem 5

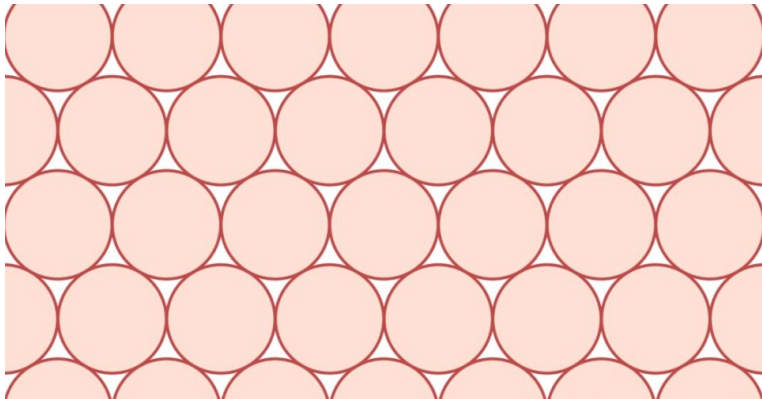
设 $p, q \in [1, \infty)$ 且 $k = 1$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$, 设 $\widehat{Q}$ 是某常规镶嵌族的参考细胞且 $\widehat{Q}$ 是延拓区域. 则对任意 $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \kappa_{p,q}^\epsilon [f, \widehat{Q}] = \Gamma(q, k, n, \widehat{Q}) \|f\|_{\dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

- H. Jia, X. Yan & D. Yang, *Math. Z.* 311 (2025), no. 2, Paper No. 36, 57 pp.

推广可积性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$

一个特殊情况:



推广可积性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$

- 注意到:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\{Q_j\}_{j \in \mathcal{G}_\epsilon}} \epsilon^{n-p} \sum_{j \in \mathcal{G}_\epsilon} \int_{Q_j} |f(x) - f_{Q_j}|^p dx \\ \sim \lim_{r \rightarrow 0^+} \left\| r^{-1} \left[\int_{B(\cdot, r)} |f(y) - f_{B(\cdot, r)}|^p dy \right]^{\frac{1}{p}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

这样我们就可以在可积性尺度上进行推广.

- H. Jia, J. Tao, D. Yang, W. Yuan & Y. Zhang, [Sci. China Math.](#) 65 (2022), 359–420.

推广可积性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$

- 称可测函数的某个子集 X 为**球Banach 函数空间**若

- (i) $\|f\|_X = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ a.e.}$;
- (ii) $|g| \leq |f| \text{ a.e.} \Rightarrow \|g\|_X \leq \|f\|_X$;
- (iii) $0 \leq f_m \uparrow f \text{ a.e.} \Rightarrow \|f_m\|_X \uparrow \|f\|_X$;
- (iv) 对任意 $B \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{1}_B \in X$;
- (v) 对任意 $f, g \in X$, $\|f + g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$;
- (vi) 对任意球 $B \subset \mathbb{R}^n$, 存在正整数 $C_{(B)}$ 使得, 对任意 $f \in X$,

$$\int_B |f(x)| dx \leq C_{(B)} \|f\|_X.$$

- Y. Sawano, K.-P. Ho, D. Yang & S. Yang, *Dissertationes Math.* 525 (2017), 1–102.

推广可积性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$

- X 包含很多著名函数空间:
- 加权Lebesgue空间 $L^p_\omega(\mathbb{R}^n)$
- Lorentz空间 $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$
- Orlicz空间 $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$
- Morrey空间 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$
- 混合范数Lebesgue 空间 $L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$
- Orlicz-slice空间 $(E^\tau_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)$
- $\vdots$

推广可积性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$

Definition 6

设 $k \in \mathbb{Z}_+$ 且 X 为球 Banach 函数空间. 球 Banach Sobolev 空间 $\dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$ 定义为所有 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $|\nabla^k f| \in X$ 的集合且具备拟范数

$$\|f\|_{\dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)} := \| |\nabla^k f| \|_X.$$

Definition 7

球 Banach 函数空间 X 的相关空间 X' 定义为

$$X' := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{X'} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{X'} := \sup \left\{ \|fg\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} : g \in X, \|g\|_X = 1 \right\}.$$

推广可积性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$

Definition 8

设 X 为Banach函数空间且 $p \in (0, \infty)$. 其 p -凸化 X^p 定义为

$$X^p := \{f \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n) : |f|^p \in X\}$$

且具备拟范数 $\|f\|_{X^p} := \| |f|^p \|_X^{1/p}$.

推广可积性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$

Definition 9

称球Banach函数空间 X 具有绝对连续范数若, 对任意 $f \in X$ 及任意可测集族 $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ 且 $E_{j+1} \subset E_j$ 及 $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_j = \emptyset$, $\|f \mathbf{1}_{E_j}\|_X \downarrow 0$ as $j \rightarrow \infty$.

Definition 10

对任意 $r \in (0, \infty)$, 中心球平均算子 $\mathcal{B}_r$ 定义为, 对任意 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 及 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{B}_r(f)(x) := \int_{B(x,r)} |f(y)| dy.$$

- F. Dai, L. Grafakos, Z. Pan, D. Yang, W. Yuan & Y. Zhang, *Math. Ann.* 388 (2024), 1691-1768.

推广可积性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$

Definition 11

设 X 为球Banach函数空间. 称中心球极大算子 $\{B_r\}_{r \in (0, \infty)}$ 在 X 上一致有界若存在正常数 C 使得, 对任意 $f \in X$,

$$\sup_{r \in (0, \infty)} \|B_r(f)\|_X \leq C \|f\|_X.$$

- $\|\mathcal{M}(f)\|_X \leq C \|f\|_X \implies \sup_{r \in (0, \infty)} \|B_r(f)\|_X \leq C \|f\|_X.$
- $\{B_r\}_{r \in (0, \infty)}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上一致有界, 这对 $\mathcal{M}$ 不成立.

推广可积性指标: $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \implies \dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$

Theorem 6

令 $k \in \mathbb{N}$, $p, q \in [1, \infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$, 且 X 与 $X^{\frac{1}{p}}$ 为球 *Banach* 函数空间. 若 $\{\mathcal{B}_r\}_{r \in (0, \infty)}$ 在 X 上有界, X 与 X' 有绝对连续范数, 则 $f \in \dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\|f\|_{\dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)}^{(1)} := \lim_{r \rightarrow 0^+} \left\| r^{-k} \left[\int_{B(\cdot, r)} |f(y) - P_{B(\cdot, r)}^{(k-1)}(f)(y)|^q dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X < \infty.$$

且对任意 $f \in \dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$,

$$\gamma(n, q, k, B(\mathbf{0}, 1)) \|\nabla^k f\|_X \leq \|f\|_{\dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)}^{(1)} \leq \Gamma(n, q, k, B(\mathbf{0}, 1)) \|\nabla^k f\|_X.$$

- H. Jia, X. Yan & D. Yang, *Math. Z.* 311 (2025), Paper No. 36, 57 pp.

Theorem 7

令 $k \in \mathbb{N}$, $\vec{p} \in [1, \infty)^n$, $q \in [1, \infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{q}) < k$. 则 $\forall f \in \dot{W}^{k, L^{(\cdot)}}$,

$$\gamma(n, q, k, B(\mathbf{0}, 1)) \| |\nabla^k f| \|_{L^{\vec{p}}} \leq \|f\|_{\dot{W}^{k, L^{\vec{p}}}}^{(1)} \leq \Gamma(n, q, k, B(\mathbf{0}, 1)) \| |\nabla^k f| \|_{L^{\vec{p}}}.$$

- 注意到, 当 $\vec{p} \in [1, \infty)^n$ 且 $p_- = 1$ 时, Hardy–Littlewood 极大算子不一定在 $(L^{\vec{p}})'$ 上有界, 因此 $W^{1, L^{\vec{p}}}$ 的 **BBM 公式不一定成立**. 但此时中心球平均算子在 $L^{\vec{p}}$ 上有界, 因此 $W^{1, L^{\vec{p}}}$ 的 **VMO 型公式成立**.
- H. Jia, X. Yan & D. Yang, *Math. Z.* 311 (2025), Paper No. 36, 57 pp.

- 对任意 $\beta \in \mathbb{R}$ 及 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 其Riesz位势 $I_\beta f$ 定义为

$$I_\beta f := \mathcal{F}^{-1} \left[(2\pi |\cdot|)^{-\beta} \mathcal{F} f \right];$$

- 加权空间 $\dot{H}_\omega^{1,p}$: $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\|f\|_{\dot{H}_\omega^{1,p}(\mathbb{R}^n)} := \|I_{-1} f\|_{L_\omega^p} < \infty$.
- 加权Sobolev空间

$$\dot{Y}_\omega^{1,p} := \begin{cases} \dot{W}_\omega^{1,p} & \text{if } n = 1 \text{ or } p = 1, \\ \dot{H}_\omega^{1,p} & \text{if } n \in \mathbb{N} \cap [2, \infty) \text{ and } p \in (1, \infty). \end{cases}$$

Theorem 8

令 $\omega \in L^1_{\text{loc}}$ 非负, $p \in [1, \infty)$, 可延拓区域 $\hat{Q}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上某镶嵌的参考细胞. 则以下等价:

- (i) $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) 存在 $C \in (0, \infty)$ 使得, 对任意 $f \in \dot{Y}^{1,p}_\omega \cap L^1_{\text{loc}}$,

$$\sup_{r \in (0, \infty)} \left\| \frac{1}{\epsilon} \left[\int_{B(\cdot, r)} |f(y) - f_{B(\cdot, r)}|^q dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p_\omega} \leq C \|f\|_{\dot{Y}^{1,p}_\omega}.$$

- (iii) 存在 $q \in [1, \infty)$ 和 $C \in (0, \infty)$ 使得, 对任意 $\epsilon \in (0, \infty)$, 常规镶嵌 $\mathcal{Q}_\epsilon(\mathbb{R}^n)$ ($\hat{Q}$ 为其参考细胞), $f \in \dot{Y}^{1,p}_\omega \cap L^1_{\text{loc}}$,

$$\sup_{\{\mathcal{Q}_\epsilon(\mathbb{R}^n)\}_{\epsilon \in (0, \infty)}} \left\{ \sum_{Q \in \mathcal{Q}_\epsilon(\mathbb{R}^n)} \frac{\omega(Q)}{\epsilon^p} \left[\int_Q |f(y) - f_Q|^q dy \right]^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C \|f\|_{\dot{Y}^{1,p}_\omega}.$$

偶数阶情形

- 令 $p > 1$. $\|f\|_{W^{2,p}} \sim \|f\|_{L^p} + \|\Delta f\|_{L^p}$, 其中 $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i}$.
- 令 $p > 1$. $f \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 且存在 $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$S_2(f, g)(\cdot) := \left\{ \int_0^\infty \left| \frac{f_{B(\cdot, t)} - f(\cdot)}{t^2} - g_{B(\cdot, t)} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

and

$$\|\Delta f\|_{L^p} \sim \|S_2(f, g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

- R. Alabern, J. Mateu & J. Verdera, *Math. Ann.* 354 (2012), 589–626.

偶数阶情形: $f_{B(\mathbf{x},r)} \implies f_{B(\mathbf{y},r)}$

Theorem 9

设 $p \in (1, \infty)$ 且 $q \in [1, p]$. 则 $f \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $f \in X$ 且

$$\liminf_{r \rightarrow 0^+} \left\| r^{-2} \left[\int_{B(\cdot, r)} |f(y) - f_{B(y,r)}|^q dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

且对任意 $f \in W^{2,X}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left\| r^{-2} \left[\int_{B(\cdot, r)} |f(y) - f_{B(y,r)}|^q dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{2(n+2)} \|\Delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

- H. Jia, X. Yan & D. Yang, *Math. Z.* 311 (2025), Paper No. 36, 57 pp.

偶数阶情形: $f_{B(x,r)} \implies f_{B(y,r)}$

- 对任意 $k \in \mathbb{N}$ 及 $x \in \mathbb{R}^n$, 令

$$D_h^1 f(x) := f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) \text{ and } D_h^k := D_h^1 D_h^{k-1}.$$

则对任意 $r \in (0, \infty)$ 及 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f(x) - f_{B(x,r)} &= f(x) - \frac{1}{2} \int_{B(0,1)} [f(x+ry) + f(x-ry)] dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_{B(0,1)} [f(x+ry) + f(x-ry) - 2f(x)] dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_{B(0,1)} D_{ry}^2 f(x) dy. \end{aligned}$$

- F. Dai, A. Gogatishvili, D. Yang & W. Yuan, *Nonlinear Anal.* 128 (2015), 86–99

偶数阶情形: $f_{B(\mathbf{x},r)} \implies f_{B(\mathbf{y},r)}$

- 自然地可以定义高阶球平均算子 $B_{k,r}$: 对任意 $k \in \mathbb{N}$ 及 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$,

$$f(x) - B_{k,r}f(x) = -\frac{1}{C_k} \int_{B(\mathbf{0},1)} D_{ry}^{2k} f(x) dy,$$

其中 $C_k := (-1)^{k+1} \binom{2k}{k}$.

- F. Dai, A. Gogatishvili, D. Yang & W. Yuan, [Nonlinear Anal.](#) 128 (2015), 86–99

偶数阶情形: $f_{B(x,r)} \implies f_{B(y,r)}$

Theorem 10

设所有记号如定理7. 假设Hard–Littlewood极大算子 $\mathcal{M}$ 在 X 上有界. 则 $f \in W^{2k,X}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $f \in W^{2k-2,X}(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\|f\|_{\dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)}^{(2)} := \lim_{r \rightarrow 0^+} \left\| r^{-2k} \left[\int_{B(\cdot,r)} |f(y) - B_{k,r}f(y)|^q dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X < \infty.$$

且对任意 $f \in W^{2k,X}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{\dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)}^{(2)} = a_k \|\Delta^k f\|_X,$$

$$\text{其中 } a_k := \frac{1}{\binom{2k}{k}} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{(n+2)(n+4) \dots (n+2k)}.$$

- H. Jia, X. Yan & D. Yang, *Math. Z.* 311 (2025), Paper No. 36, 57 pp.

一些未解决的问题

一些未解决的问题

Theorem 11 (Bourgain–Brezis–Mironescu 公式)

令 $\{\rho_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \infty)}$ 是非负径向函数族且满足 $\forall \epsilon \in (0, \infty), \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(|x|) dx = 1$,
 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \delta)} \rho_\epsilon(|x|) dx = 0$.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_\epsilon(|x - y|) dy dx = \frac{K(p, n)}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx,$$

其中

$$K(p, n) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} v \cdot e d\sigma(v) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{p+n}{2})}$$

仅依赖于 p 和 n .

- J. Bourgain, H. Brezis & P. Mironescu, *Optimal Control and Partial Differential Equations*, pp. 439–455. IOS, Amsterdam, 2001.
- H. Brezis, *Russ. Math. Surv.* 57 (2002), 693–708.

一些未解决的问题

Corollary 1

令

$$\rho_{\epsilon}(r) := \begin{cases} \frac{1}{pr^{n-\epsilon p} \epsilon^{\frac{\epsilon p}{2}-1}}, & r \in (0, \epsilon^{-\frac{1}{2}}), \\ 0, & r \in [\epsilon^{-\frac{1}{2}}, \infty). \end{cases}$$

则 $\forall p \in [1, \infty), f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy dx = \frac{K(p, n)}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx.$$

Corollary 2

令

$$\rho_{\epsilon}(r) := \begin{cases} \frac{(n+mp)r^{mp}}{\epsilon^{n+mp}}, & r \in (0, \epsilon), \\ 0, & r \in [\epsilon, \infty). \end{cases}$$

则 $\forall p \in [1, \infty), f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(x, \epsilon)} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p} dy dx = \frac{K(p, n)}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx.$$

一些未解决的问题

Question 1

是否 $f \in \dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y) - P_{B(\cdot, \epsilon)}^{(k-1)}(f)(y)|^q}{|\cdot - y|^{kq}} \rho_\epsilon(\cdot - y) dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X < \infty.$$

一些未解决的问题

Question 2

是否 $f \in \dot{W}^{k,X}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y) - B_{k,\epsilon}(f)(y)|^q}{|\cdot - y|^{2kq}} \rho_\epsilon(\cdot - y) dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X < \infty.$$

一些未解决的问题

Proposition 1

对任意 $p \in [1, \infty)$, $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 且 $\exists v \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 使得

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(\mathbf{0}, r)} \frac{|f(x+h) - f(x) - v(x) \cdot h|^p}{|h|^p} dh dx = 0.$$

- D. Spector, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 353 (2015), 327–332.

一些未解决的问题

Proposition 2

$f \in W^{k,X}$ 当且仅当 $f \in W^{k-1,X}$ 且对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^n$, 存在 $H(x) \in \mathbb{M}_{n^{k-1},n}$ 使得 $|H| \in X$ 且

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left\| \frac{1}{r^k} \left[\int_{B(0,r)} \left| f(\cdot + h) - T^{k-1}(f)(\cdot + h) - \frac{1}{k!} \sigma_k(h) H(\cdot) h \right|^q dh \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X = 0,$$

其中 $T^{k-1}(f)$ 是 $(k-1)$ 次泰勒公式. 此外, 对任意 $f \in W^{k,X}$,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left\| \frac{1}{r^k} \left[\int_{B(0,r)} |f(\cdot + h) - T^k(f)(\cdot + h)|^q dh \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X = 0. \quad (1)$$

- H. Jia, X. Yan & D. Yang, *Math. Z.* 311 (2025), Paper No. 36, 57 pp.

一些未解决的问题

Question 3

是否 $f \in W^{k,X}$ 当且仅当 $f \in W^{k-1,X}$ 且对 a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, $\exists H(x) \in \mathbb{M}_{n^{k-1},n}$ 使得 $|H| \in X$ 且

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left\| \left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{|f(\cdot + h) - T^{k-1}(f)(\cdot + h) - \frac{1}{k!} \sigma_k(h) H(\cdot) h|^q}{|h|^{kq}} dh \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X = 0.$$

一些未解决的问题

Question 4

是否 $f \in W^{k,X}$ 当且仅当 $f \in W^{k-1,X}$ 且

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left\| \frac{1}{r^k} \left[\int_{B(\cdot, r)} |f(y) - P_{B(\cdot, r)}^{(k)}(f)(y)|^q dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X = 0$$

或者

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left\| \left[\int_{B(\cdot, r)} \frac{|f(y) - P_{B(\cdot, r)}^{(k)}(f)(y)|^q}{|\cdot - y|^{qk}} \rho_r(\cdot - y) dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X = 0.$$

Main References

- G. Di Fratta & A. Fiorenza, *J. Funct. Anal.* 279 (2020), 108556, 26 pp.
- F. Farroni, N. Fusco, S. Guarino Lo Bianco & R. Schiattarella, *J. Funct. Anal.* 278 (2020), 108451, 32 pp.
- R. Ferreira, C. Kreisbeck & A. M. Ribeiro, *Nonlinear Anal.* 112 (2015), 199–214.
- M. Fuchs & J. Müller, *Nonlinear Anal.* 154 (2017), 122–147.
- N. Fusco, G. Moscarello & C. Sbordone, *J. Funct. Anal.* 270 (2016), 419–446.
- S. Guarino Lo Bianco & R. Schiattarella, *Potential Anal.* 59 (2023), 917–932.
- Y. Zhao, Y. Li, D. Yang, W. Yuan & Y. Zhang, *Adv. Math.* 458 (2024), Paper No. 109957, 63 pp.
- P. Hu, Y. Li, D. Yang & W. Yuan, *Adv. Math.* 481 (2025), Paper No. 110537, 66 pp.
- S. Guarino Lo Bianco & R. Schiattarella, *J. Convex Anal.* 31 (2024), 671–688.
- H. Jia, J. Tao, D. Yang, W. Yuan & Y. Zhang, *Sci. China Math.* 65 (2022), 359–420.

Thank you for your attention!