

含参数泊松方程解的一些估计

完成人：孟子湔, 李宝德, 袁海荣

2025.12.21

2025杭州调和分析青年学者论坛

引言

泊松方程:

$$\Delta_x u(x, y) = f(x, y), (x, y) \in B^x \times B^y.$$

$$u(x, y) = (f(\cdot, y) * \Gamma)(x).$$

引理4.4

设 $B_1 := B_R(x_0)$ 和 $B_2 := B_{2R}(x_0)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中两个同心球, 假设 $f \in C^\alpha(B_2)$, $0 < \alpha < 1$, 并且在 B_2 上定义 $u := (f * \Gamma)(x)$, 则 $u \in C^{2, \alpha}(B_1)$.

[1] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1983. 319
(2001), no. 1, 89 - 149.

引言

问题1. $f(x, \cdot) \in C^\alpha(B^y)$, $u(x, \cdot) \in C^\alpha(B^y)$?

问题2. $f(x, \cdot) \in L^p$, Morrey, BMO, $u(x, \cdot) \in$?

问题3. 含参量非齐次柯西黎曼方程的应用.

含参量泊松方程解的Hölder估计

定义1

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 的任意子集, $0 < \alpha < 1$. 如果存在常数 $C_\alpha > 0$, 使得对于 $\forall x, y \in \Omega$, 满足

$$|f(x) - f(y)| \leq C_\alpha |x - y|^\alpha,$$

则称 f 在 Ω 上是Hölder连续的.

含参量泊松方程解的Hölder估计

定义2

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 的任意子集, $0 < \alpha < 1$. 如果函数 f 在 Ω 的任意紧子集上是Hölder连续的, 称函数 f 在 Ω 上是局部Hölder连续.

定义3

设 Ω^x 为 $\mathbb{R}^n$ 中的任一子集, Ω^y 为 $\mathbb{R}^m$ 中任一子集, $0 < \alpha < 1$. 如果存在常数 $C_\alpha > 0$, 使得对于 $\forall x_1, x_2 \in \Omega^x$ 和 $\forall y_1, y_2 \in \Omega^y$, 满足

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq C_\alpha |y_1 - y_2|^\alpha,$$

则称对于 $\forall x \in \Omega^x$, $f(x, \cdot)$ 在 Ω^y 上是一致Hölder连续的.

含参量泊松方程解的Hölder估计

引理1

设 $B := B_R(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任一球, 函数 f 在球 B 上可积且有界, u 是函数 f 在 B 上的牛顿位势. 则 $u \in C^1(B)$, 且对于 $\forall x \in B$ 和任意的 $i = 1, \dots, n$, 有

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \int_B \frac{\Gamma(x-y)}{\partial x_i} f(t) dt;$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \int_{B_1} \frac{\Gamma(x-y)}{\partial x_i} [f(t) - f(x)] dt - f(x) \int_{\partial B_1} \Gamma(x-t) \nu_i(t) dS_t,$$

这里 B_1 是任意一个包含 B 的球, 并且 f 在球 B 外延拓为 0, $\nu_i(t)$ 是边界 ∂B_1 关于 t 的单位外法向量的第 i 个分量.

含参量泊松方程解的Hölder估计

引理2[1, 引理4.2.]

设 $B := B_R(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任一球, 函数 f 在球 B 上有界且局部 Hölder 连续, u 是函数 f 在 B 上的牛顿位势. 则 $u \in C^2(B)$, $\Delta u = f$, 且对于 $\forall x \in B$ 和 $i, j = 1, \dots, n$, 有

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \int_{B_1} \frac{\partial^2 \Gamma(x-t)}{\partial x_i \partial x_j} [f(t) - f(x)] dt - f(x) \int_{\partial B_1} \frac{\partial \Gamma(x-t)}{\partial x_i} \nu_j(t) dS_t,$$

这里 B_1 是包含 B 的任一球, 并且 f 在 B 外延拓为 0, $\nu_j(t)$ 是边界 ∂B_1 关于 t 的单位外法向量的第 j 个分量.

[1] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1983. 319 (2001), no. 1, 89 - 149.

含参量泊松方程解的Hölder估计

引理3[1, 引理4.4.]

设 $B_1 := B_R(x_0)$ 和 $B_2 := B_{2R}(x_0)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中两个同心球, 假设 $f \in C^\alpha(B_2)$, $0 < \alpha < 1$, 并且在 B_2 上定义 $u := (f * \Gamma)(x)$, 则 $u \in C^{2,\alpha}(B_1)$.

[1] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1983. 319
(2001), no. 1, 89 - 149.

含参量泊松方程解的Hölder估计

定理1

设 $0 < \alpha < 1$, $B_1^x := B_R(x_0)$ 和 $B_2^x := B_{2R}(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个同心球, $B^y := B_{\tilde{R}}(y_0)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中任一球, 并且设 f 是支在 $B_2^x \times B^y$ 上的函数. 在 $B_2^x \times B^y$ 上定义 $u(x, y) = (f(\cdot, y) * \Gamma)(x)$.

- (i) 如果对于 $\forall y \in B^y$, $f(\cdot, y)$ 在 B_2^x 上是一致 Hölder 连续的, 则对于任意的多重指标 $|\beta| \leq 2$ 和 $\forall y \in B^y$, $D_x^\beta u(\cdot, y)$ 在 B_1^x 上是一致 Hölder 连续的.
- (ii) 如果对于 $\forall y \in B^y$, 函数 $f(x, y)$ 关于 x 在 B_2^x 上是有界和可积的, 并且对于 $\forall x \in B_2^x$, $f(x, \cdot)$ 在 B^y 上是一致 Hölder 连续的, 则对于任意的多重指标 $|\beta| \leq 1$ 和 $x \in B_2^x$, $D_x^\beta u(x, \cdot)$ 在 B^y 上是一致 Hölder 连续的.

含参量泊松方程解的Hölder估计

(iii) 如果对于 $\forall x \in B_2^x, f(x, \cdot)$ 在 B^y 上是一致Hölder连续的, $f \in L^\infty(B_1^x \times B^y)$, 并且对于 $\forall y \in B^y, f(\cdot, y)$ 在 B_2^x 上是一致Hölder连续的, 则对于任意的 $i = 1, \dots, n$ 和 $x \in B_1^x, y \in B^y$, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^\alpha(B_1^x \times B^y).$$

含参量泊松方程解的Hölder估计

(iv) 如果对于 $\forall x \in B_2^x$,

(a) $f(x, \cdot)$ 在 B^y 上是一致Hölder连续的;

(b) $f \in L^\infty(B_1^x \times B^y)$;

(c) 对于 $\forall y \in B^y$, $f(\cdot, y)$ 在 B_2^x 上是一致Hölder连续的,

则对于 $x_1, x_2 \in B_1^x$, $y_1, y_2 \in B^y$, $x_1 \neq x_2$ 和 $i, j = 1, \dots, n$, 有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 u(x_1, y_1)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u(x_2, y_2)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \\ & \leq C_{n, \alpha, R} \max\{1, \|f\|_{L^\infty(B_1^x \times B^y)}\} (|x_1 - x_2|^\alpha + |y_1 - y_2|^\alpha \\ & \quad + \frac{|y_1 - y_2|^\alpha}{|x_1 - x_2|}) . \end{aligned}$$

含参量泊松方程解的Hölder估计

注记1

如果我们选择任意两个域 $\Omega_1^x \subset B_1^x$ 和 $\Omega_2^x \supset B_2^x$ 来替代 B_1^x 和 B_2^x , 则定理1的结论仍然成立.

我们的定理1是对Gilbarg和Trudinger引理4.4[1]的拓展, 我们不仅补全了关于牛顿位势的零阶和一阶Hölder连续性, 还给出了含参数的牛顿位势关于参数的Hölder连续型估计和在乘积空间上的混合估计, 其不足之处在于含参数的牛顿位势的关于 x 的二阶导数在乘积空间上的估计无法做到一致性. 下面我们将定理1的结论推广到Morrey空间, L^p 空间, Sobolev空间和BMO空间.

[1] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1983. 319 (2001), no. 1, 89 - 149.

含参量泊松方程解的Morrey, L^p , Sobolev估计

定义4[2, p. 13]

设 $B := B_R(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任一球, 对于任意的 $0 < q, p \leq \infty$. 则 $\mathcal{M}_q^p$ 空间定义为:

$$\mathcal{M}_q^p(B) := \{g \in L_{loc}^q(B) : \|g\|_{\mathcal{M}_q^p(B)} < \infty\},$$

其中

$$\|g\|_{\mathcal{M}_q^p(B)} := \sup_{B_r(z) \subset B} |B_r(z)|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \left(\int_{B_r(z)} |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

[2] Sawano Y. Morrey Spaces: Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's, Volume I. London: Taylor & Francis, 2020.

含参量泊松方程解的Moeery, L^p , Sobolev估计

定义5[3, p. 60]

设 α 为多重指标, m 是非负整数, $1 \leq p \leq \infty$. 则Sobolev空间定义为:

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) := (g \in L^p(\mathbb{R}^n) | D^\alpha g \in L^p(\mathbb{R}^n), 0 \leq |\alpha| \leq m),$$

当 $1 \leq p < \infty$ 时,

$$\|g\|_{m,p} := \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha g\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}},$$

当 $p = \infty$ 时,

$$\|g\|_{m,\infty} := \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha g\|_\infty,$$

D^α 指的是弱导数.

[3] Adams R A, Fournier J J F. Sobolev Spaces. Amsterdam: Elsevier\Academic Press, 2003.

含参量泊松方程解的Moeery, L^p , Sobolev估计

定理2

设 $B^x := B_R(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任一球, $B^y := B_{\tilde{R}}(y_0)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中任一球, $1 \leq q, p \leq \infty$. 设 $f(x, y)$ 关于 x 在 B^x 上有界且可积, 在乘积空间 $B^x \times B^y$ 上定义 $u(x, y) := (f(\cdot, y) * \Gamma)(x)$.

(i) 如果对于 $\forall x \in B^x$, $f(x, \cdot) \in \mathcal{M}_q^p(B^y)$, 则对于任意的多重指标 $|\beta| \leq 1$ 和 $\forall x \in B^x$, 有 $D_x^\beta u(x, \cdot) \in \mathcal{M}_q^p(B^y)$.

含参量泊松方程解的Moeery, L^p , Sobolev估计

(ii) 如果函数 $f(x, y)$ 满足

(a) $f(x, y)$ 关于 x 在球 B^x 上有界且局部Hölder连续;

(b) 对于 $\forall x \in B^x$, $f(x, \cdot) \in \mathcal{M}_q^p(B^y)$;

(c) 对于 $\forall x \in B^x$ 和 $y \in B^y$, 存在常数 $\epsilon \geq 0$, 使得

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq C_{\alpha, \epsilon} |y - y_0|^\epsilon |x_1 - x_2|^\alpha,$$

则对于任意的 $i, j = 1, \dots, n$ 和 $\forall x \in B^x$, 有 $\frac{\partial^2 u(x, \cdot)}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathcal{M}_q^p(B^y)$.

含参量泊松方程解的Moeery, L^p , Sobolev估计

因为当 $p = q$ 时, $\mathcal{M}_q^p(B) = L^p(B)$, 所以根据定理2, 当 $p = q$ 时我们可以得到 L^p 空间和Sobolev空间上的如下推论1和2.

推论1

设 $B^x := B_R(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任一球, $B^y := B_{\tilde{R}}(y_0)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中任一球, $1 \leq p \leq \infty$. 设在球 B^x 上函数 f 关于 x 有界且可积, 在乘积空间 $B^x \times B^y$ 上定义 $u(x, y) := (f(\cdot, y) * \Gamma)(x)$.

(i) 如果对于 $\forall x \in B^x$, $f(x, \cdot) \in L^p(B^y)$, 则对于任意的多重指标 $|\beta| \leq 1$ 和 $\forall x \in B^x$, 有 $D_x^\beta u(x, \cdot) \in L^p(B^y)$.

含参量泊松方程解的Moeery, L^p , Sobolev估计

(ii) 如果函数 $f(x, y)$ 满足

(a) $f(x, y)$ 关于 x 在球 B^x 上有界且局部Hölder连续;

(b) 对于 $\forall x \in B^x$, $f(x, \cdot) \in L^p(B^y)$;

(c) 对于 $\forall x \in B^x$ 和 $y \in B^y$, 存在常数 $\epsilon \geq 0$, 使得

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq C_{\alpha, \epsilon} |y - y_0|^\epsilon |x_1 - x_2|^\alpha,$$

则对于任意的 $i, j = 1, \dots, n$ 和 $\forall x \in B^x$, 有 $\frac{\partial^2 u(x, \cdot)}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(B^y)$.

含参量泊松方程解的Moeery, L^p , Sobolev估计

推论2

设 $B^x := B_R(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任一球, $B^y := B_{\tilde{R}}(y_0)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中任一球, $1 \leq p \leq \infty$. 设在球 B^x 上函数 f 关于 x 有界, 可积且局部Hölder连续, 在乘积空间 $B^x \times B^y$ 上定义 $u(x, y) := (f(\cdot, y) * \Gamma)(x)$.

如果对于 $\forall x \in B^x$, $f(x, \cdot) \in L^p(B^y)$, 并且对于 $\forall x \in B^x$ 和 $y \in B^y$, 存在常数 $\epsilon \geq 0$, 使得

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq C_{\alpha, \epsilon} |y - y_0|^\epsilon |x_1 - x_2|^\alpha,$$

则对于任意的 $i, j = 1, \dots, n$ 和 $\forall x \in B^x$, 有 $u(x, \cdot) \in W^{2,p}(B^y)$ 和 $\frac{\partial u(x, \cdot)}{\partial x_i} \in W^{1,p}(B^y)$.

含参数泊松方程解的BMO估计

定义6[4, p. 415]

设 $B := B_R(x_0)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意球, 则 B 上的BMO空间定义为:

$$BMO(B) := \{g \in L^1_{loc}(B) : \|g\|_{BMO(B)} < \infty\},$$

其中

$$\|g\|_{BMO(B)} := \sup_{B_r(z) \subset B} \frac{1}{|B_r(z)|} \int_{B_r(z)} |g(x) - g_{B_r(z)}| dx.$$

[4] John F, Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation. Communications on Pure and Applied Mathematics., **14** (1961), 415-426.

含参数泊松方程解的BMO估计

定理3

设 $B^x := B_R(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任一球, $B^y := B_{\tilde{R}}(y_0)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中任一球.

f 是 $B^x \times B^y$ 上的可积函数, 并且 $u(x, y) := (f(\cdot, y) * \Gamma)(x)$.

(i) 如果对于 $\forall x \in B^x$, $f(x, \cdot) \in BMO(B^y)$, 则对于 $\forall x \in B^x$, 有

$$u(x, \cdot) \in BMO(B^y).$$

(ii) 如果对于 $\forall x \in B^x$, $f(x, \cdot) \in BMO(B^y)$, 并且 $f(x, y)$ 关于 x 在 B^x 上有界, 则对于任意的 $i = 1, \dots, n$ 和 $\forall x \in B^x$, 有 $\frac{\partial u(x, \cdot)}{\partial x_i} \in BMO(B^y)$.

含参数泊松方程解的BMO估计

(iii) 如果函数 $f(x, y)$ 满足

(a) $f(x, y)$ 关于 x 在球 B^x 上有界且局部Hölder连续;

(b) 对于 $\forall x \in B^x$, $f(x, \cdot) \in L^\infty(B^y)$;

(c) 对于 $\forall x \in B^x$ 和 $y \in B^y$, 存在常数 $\epsilon \geq 0$, 使得

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq C_{\alpha, \epsilon} |y - y_0|^\epsilon |x_1 - x_2|^\alpha,$$

则对于任意的 $i, j = 1, \dots, n$ 和 $\forall x \in B^x$, 有 $\frac{\partial^2 u(x, \cdot)}{\partial x_i \partial x_j} \in BMO(B^y)$.

应用

$$\frac{\partial u((x, y), z)}{\partial x} - \frac{\partial v((x, y), z)}{\partial y} = \phi((x, y), z) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u((x, y), z)}{\partial y} + \frac{\partial v((x, y), z)}{\partial x} = \psi((x, y), z), \quad (2)$$

其中球 $B^{xy} \subset \mathbb{R}^2$, $B^z \subset \mathbb{R}^n$, $((x, y), z) \in B^{xy} \times B^z$. 它在复分析与偏微分方程之间联系的理论方面具有重要意义, 可用于研究诸如复值函数的可微性等问题, 也与平面场的一些问题(如流体力学和电磁学等领域的平面场问题)有关.

应用

定理4

设 B^{xy} 为 $\mathbb{R}^2$ 中的任意球, B^z 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意球. 对于 $\forall z \in B^z$, 若 v 和 u 满足含参变量的非齐次柯西黎曼方程(1)和(2), 并且

$\phi(\cdot, z), \psi(\cdot, z) \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$, $\phi(\cdot, z)$ 和 $\psi(\cdot, z)$ 均支在 B^{xy} 上, 则

(i) 如果函数 $f := \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$ 满足定理1, 2, 3和推论1, 2的假设条件, 并且函数 $f((x, y), z)$ 在 B^{xy} 上关于 (x, y) 是有界且局部Hölder连续的, 则上述定理的结果应用于方程的解 $u((x, y), z) := (f(\cdot, z) * \Gamma)(x, y)$ 上同样成立.

应用

(ii) 如果函数 $g := \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y}$ 满足定理 1, 2, 3 和推论 1, 2 的假设条件, 并且函数 $g((x, y), z)$ 在 B^{xy} 上关于 (x, y) 是有界且局部 Hölder 连续的, 则上述定理的结果应用于方程的解 $v((x, y), z) := (g(\cdot, z) * \Gamma)(x, y)$ 上同样成立.

应用

下面我们给出定理4的证明, 我们分三步来给出证明.

(i) 我们首先将含参数的非齐次柯西黎曼方程转化为含参数的泊松方程, 并验证 $u((x, y), z) = (f(\cdot, z) * \Gamma)(x, y)$ 和

$v((x, y), z) = (g(\cdot, z) * \Gamma)(x, y)$ 是含参数泊松方程的解.

对于 $\forall (x, y) \in B^{xy}$ 和 $\forall z \in B^z$, 我们对(1)式两边关于 x 求导,
对(2)式两边关于 y 求导得到

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \Delta u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = f. \quad (3)$$

同理, 我们得到

应用

$$\Delta v = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = g. \quad (4)$$

由于 $f((x, y), z)$ 和 $g((x, y), z)$ 在球 B^{xy} 上都是有界和局部Hölder连续的, 因此根据引理2, 我们知道 $u((x, y), z) = (f(\cdot, z) * \Gamma)(x, y)$ 和 $v((x, y), z) = (g(\cdot, z) * \Gamma)(x, y)$ 分别是(3)和(4)的解.

应用

(ii) 验证 $u((x, y), z) = (f(\cdot, z) * \Gamma)(x, y)$ 和 $v((x, y), z) = (g(\cdot, z) * \Gamma)(x, y)$ 是(1)和(2)的解.

设 $\tilde{x} := (x, y)$. 因为 $\phi(\cdot, z), \psi(\cdot, z) \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$ 并且 $\phi(\cdot, z)$ 和 $\psi(\cdot, z)$ 支在 B^{xy} 上, 所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) (\tilde{x} - t) dt \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) (\tilde{x} - t) dt.\end{aligned}\quad (5)$$

又因为 $\phi(\cdot, z) \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$ 和 $\Delta_{\tilde{x}} \phi * \Gamma = \phi$ (参考[5, 定理1.]), 则将(5)中两式相减, 我们得到

[5] Evans L. C. Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 2022.

应用

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) (\tilde{x} - t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t) \Delta_{\tilde{x}} \phi(\tilde{x} - t) dt = \Delta_{\tilde{x}} \phi * \Gamma = \phi,\end{aligned}$$

这表明 $u = f * \Gamma$ 是(1)的解. 同理我们也可以得到 $v = g * \Gamma$ 是(2)的解.

应用

(iii) 最后我们验证 u 和 v 满足定理1, 2, 3和推论1, 2.

根据(i)和(ii)我们知道 $u = f * \Gamma$ 和 $v = g * \Gamma$ 是(1), (2), (3)和(4)的解. 最后根据定理1, 2, 3和推论1, 2, 我们知道这些定理的结论分别适用于 $u = f * \Gamma$ 和 $v = g * \Gamma$ 的情况.

谢谢大家!